MATRIČNA ANALIZA

Opšte

Metoda sila i metoda deformacije su dvije osnovne metode i **u klasičnoj i u matričnoj formulaciji**.

U **klasičnoj formulaciji** dati **statički sistem se posmatra kao cjelina** (system approache).

U proračunu se **usvaja ona metoda koja je pogodnija za analizu** datog sistema.

Izbor metode zavisi od **statičke ili deformacijske neodređenost nosača**.

Ako je **statička neodređenost manja bira se metoda sila ili obrnuto**.

U matričnoj formulaciji metode sila i metode deformacija osnovu čini **štap kao element sistema** (element approache).

Sistem je diskretan, sastavljen od pojedinih štapova – **elemenata sistema koji su međusobno vezani u diskretnim tačkama čvorovima sistema.**

Analiza diskretnog sistema se sastoji od sljedeća dva dijela:

1) Analiza elementa (štapa)

2) Analiza strukture (sistema elemenata-štapova)

U analizi elementa polazi se od osnovnih jednačina teorije štapa i **uspostavlja veza između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja u čvorovima na krajevima elemenata**.
U analizi strukture, odnosno, sistema štapova kao cjeline **polazi se od veza između sila i pomjeranja koje važe za pojedine elemente**.
Na osnovu tih relacija formiraju se odgovarajuće jednačine za strukturu štapova uz vođenje računa **o vezama u čvorovima**, **uslovima ravnoteže i načinu oslanjanja**.

. U tu svrhu koriste se:

1) Uslovi kompatibilnosti čvorova
2) Uslovi ravnoteže čvorova
3) Uslovi oslanjanja sistema

U dobijenom sistemu jednačina **nepoznate su parametri u čvorovima**.

To mogu biti

- **generalisane sile (sile i momenti) i/ili**
- **generalisana pomjeranja (komponentalna pomjeranja i obrtanja)**

U zavisnosti od izbora nepoznatih u analizi postoje tri metode:

- **Metoda deformacije**
- **Metoda sila**
- **Mješovita ili hibridna metoda.**

Zbog svoje **opštosti i jednostavnosti** najviše je u primjeni **metoda deformacije**, pa je ona predmet naših razmatranja.

Nepoznate u metodi deformacije su **komponente pomjeranja u i v i obrtanja čvorova φ.**

Uvodimo pojmove:

R – vektor sila

q – vektor pomjeranja

k – matrica krutosti

Za svaki štap može se napisati sljedeća veza ove tri veličine: $\mathbf{R=k\,q}$

Na osnovu **analize strukture (sistema štapova)** i formiranih **matrica krutosti pojedinih štapova** formira se **matrica krutosti sistema štapova K*:**

$$\mathbf{K^*\,q^* = S^*}$$

gdje su:

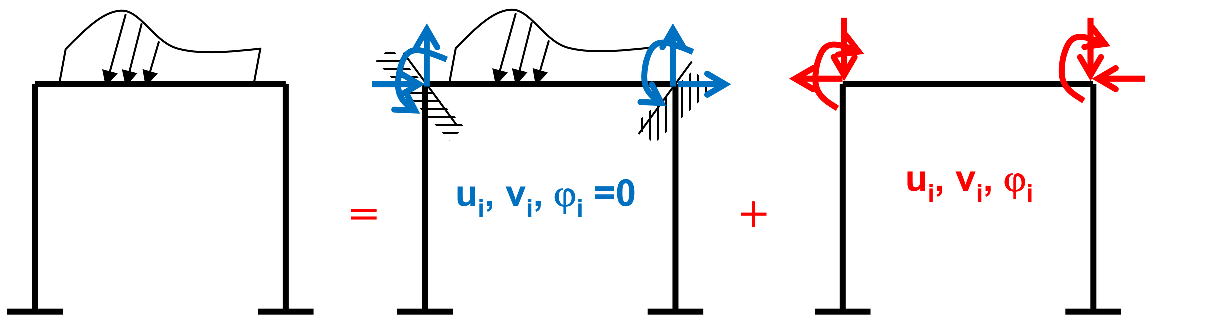
K* - matrica krutosti sistema elemenata

q* - vektor nepoznatih parametara pomjeranja

S* - vektor čvornog opterećenja sistema

Iz navedenog **sistema jednačina** određuju se **nepoznati parametri pomjeranja q*,** a zatim se iz relacije **određuju sile na krajevima štapova**, odnosno **čvorovima elemenata**.

Na osnovu **principa superpozicije uticaja**, uticaji u sistemu se računaju na način koji je dat na slici **kao zbir uticaja ekvivalentnog sistema koji je deformacijski određen i uticaja usled ekvivalentnog opterećenja:**



dati sistem (a) ekvivalentni sistem (b) ekvivalentno opterećenje

Na slici (a) štapovi su **opterećeni opterećenjem** usled kojeg se određuju **reaktivne sile i momenti uz pretpostavku** da su u_i, v_i, $\varphi_i = 0$.

Odnosno, **reaktivne sile i momenti** su određeni u **sistemu u kojem se čvorovi ne pomjeranju i presjeci ne obrću (deformacijski određen sistem)**.

Sistem na slici (b) **opterećen je u čvorovima** i to opterećenjem koje je **po intenzitetu jednako opterećenju u čvorovima sistema štapova ali sa promijenjenim znakom**.

Ovo opterećenje se naziva **ekvivalentno čvorno opterećenje.**

Ovaj stav predstavlja **osnovu koncepta matrične analize metodom deformacije**.

On praktično znači da se **pri određivanju pomjeranja i obrtanja čvorova sistema spoljašnji uticaji duž pojedinih štapova zamjenjuju ekvivalentnim opterećenjem na njegovim krajevima**, odnosno, u čvorovima sistema što je znatno pogodnije za analizu od stvarno zadatog opterećenja.

Ekvivalentno opterećenje se **određuje u kinematički određenom sistemu i jednako je negativnim vrijednostima reakcija oslonaca totalno uklještenih štapova**.

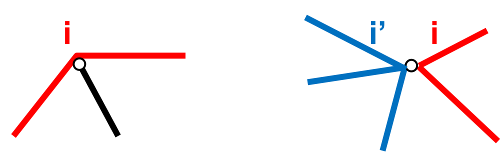
Znači u analizi, na nivou elementa, **pored veze generalisanih sila i generalisanih pomjeranja u čvorovima elementa koja se uspostavlja preko matrice krutosti elementa, određuje se i vektor ekvivalentnog opterećenja elementa.**

Kinematička (deformacijska) neodređenost sistema

Ukupan broj nepoznatih, međusobno **nezavisnih parametara pomjeranja**, **predstavlja kinematički ili deformacijsku neodređenost sistema**.

U slučaju ravnih sistema **svaki čvor ima dvije komponente pomjeranja**, stoga **će k čvorova u sistemu imati 2k nepoznatih komponentalnih pomjeranja**.

U čvoru **sa kruto vezanim štapovima**, prema definiciji **krute veze**, svi **kruto vezani štapovi obrću se za isti ugao tako da je ukupan broj nepoznatih uglova obrtanja jednak broju grupa kruto vezanih štapova u sistemu, m:**



Ukupan broj **nezavisnih parametara pomjeranja sistema umanjuje se za broj spriječenih ili zadatih pomjeranja u osloncima.**

Ukupan broj deformacijski nepoznatih određuje se pomoću izraza:

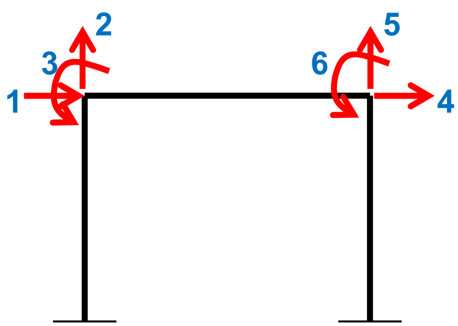
$$n_t = (2k - z_o) + m$$

Ovim izrazom definisan je **broj deformacijski nepoznatih za slučaj kada se ne zanemaruje uticaj normalnih sila na deformaciju sistema**.

U **približnoj metodi deformacija uticaj normalnih sila na deformaciju nosača se zanemaruje**, iz tog razloga **broj deformacijski nepoznatih se određuje primjenom izraza**:

$$n_p = [2k - (z_o + z_s)] + m$$

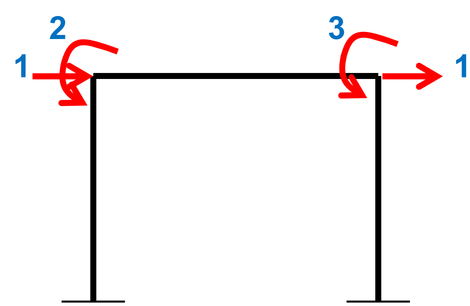
Na slici je prikazan je **način određivanja deformacijski neodređenih veličina za oba navedena slučaja:**



tačna metoda deformacije

$n_t = (2k - z_o) + m \quad =(2x4-4)+2=6$

nepoznate: 1, 2, 3, 4, 5 i 6



približna metoda deformacije

$n_p = (2k - z_o - z_s) + m \quad =(2x4-4-3)+2=3$

nepoznate: 1, 2 i 3

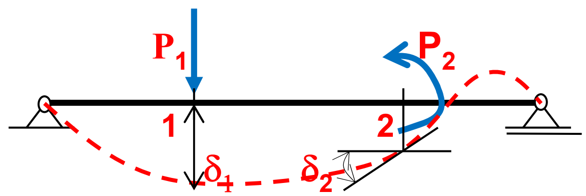
Veze između sila i pomjeranja

Za elastično tijelo definišu se dva osnovna pojma matrične analize linijskih nosača:

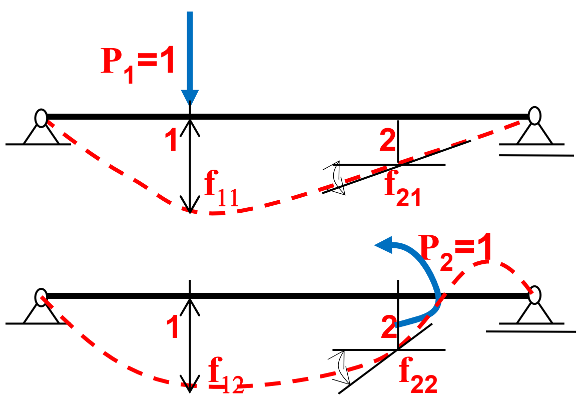
- **Matrica fleksibilnosti**
- **Matrica krutosti**

Posmatraćemo **prostu gredu opterećenu silom P_1 u tački 1 i momentom P_2 u tački 2**, kako je to prikazano na slici.

Nosač je idealno elastičan, a **pomjeranja δ_1 i δ_2** su **male veličine**.



$$\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\end{bmatrix}$$



Primjenom superpozicije uticaja pomjeranja napadnih tačaka generalisanih sila P_1 i P_2, mogu se sračunati na sljedeći način:

$P_1=1$ i $P_2=0$

$$\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{sijedi} \quad \begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{11}\\ f_{21}\end{bmatrix}$$

$P_1=0$ i $P_2=1$

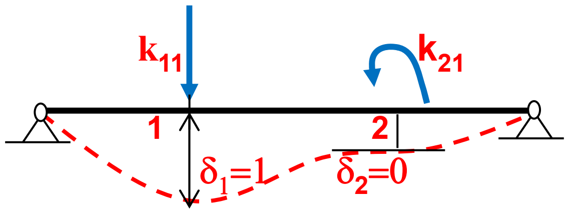
$$\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{sijedi} \quad \begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{12}\\ f_{22}\end{bmatrix}$$

Koeficijenti **f_{11} i f_{21}** predstavljaju **vertikalno pomjeranje tačke 1 i obrtanje tačke 2**, **usled dejstva sile $P_1=1$**, dok koeficijenti **f_{12} i f_{22}** predstavljaju **vertikalno pomjeranje u tački 1 i obrtanje u tački 2**, **usled dejstva momenta $P_2=1$**.

f_{ij} , i,j=1,2 su koeficijenti gipkosti ili koeficijenti fleksibilnosti nosača koji odgovaraju silama P_i (i=1,2).

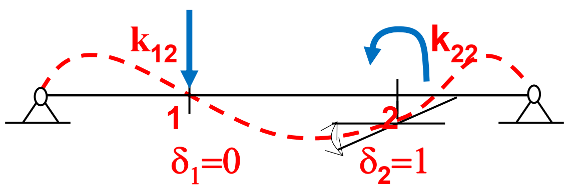
Veze između **sila i pomjeranja** date su u sljedećem obliku:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$



$\delta_1=1$ i $\delta_2=0$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix}$$



$\delta_1=0$ i $\delta_2=1$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{bmatrix}$$

k_{ij} , i,j=1,2 su koeficijenti krutosti nosača koji odgovaraju pomjeranjima δ_1 i δ_2.

Koeficijenti **k_{11} i k_{21}** predstavljaju **silu u tački 1 i moment u tački 2 usled** kojih **nastaju pomjeranja δ_1=1 i δ_2=0**, dok koeficijenti **k_{12} i k_{22}** predstavljaju **silu u tački 1 i moment u tački 2** kada je obrtanje **δ_2=1 i δ_1=0**.

Veze pomjeranja i sila mogu da se uopšte za proizvoljan nosač na koji djeluje proizvoljan **sistem sila Ri** u tačkama i =1,2,...,n i **odgovarajućim generalisanim pomjeranjima q_i** u tačkama i=1,...,n:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1j} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1} & \cdots & f_{ij} & \cdots & f_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nj} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_j \\ \cdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Skraćeni matrični oblik:

$$q = F\,R$$

F - matrica fleksibilnosti

Elementi j-te kolone matrice fleksibilnosti F predstavljaju generalisana pomjeranja q_i, i=1,...,n usled dejstva jedinične sile R_j=1, dok su sve ostale sile jednake nuli.

Na sličan način, zavisnost sila i pomjeranja uopšte za proizvoljan nosač može se prikazati u sljedećem obliku:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_j \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$$

ili u skraćnom matričnom obliku

$$R = k\,q$$

Elementi j-te kolone matrice k predstavljaju generalisane sile R_i u tačkama i=1,...,n usled jediničnog generalisanog pomjeranja $q_j=1$ dok su sva ostala generalisana pomjeranja jednaka nuli.

Na osnovu **Maxwell-ovog stava o uzajamnosti pomjeranja** slijedi da je **matrica fleksibilnosti simetrična**, slijedi:

$$f_{ij} = f_{ji}$$ **odnosno:** $$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{T}$$

Iz navedene relacije vidi se da je $\mathbf{F=K^{-1}}$ pa se zaključuje da je i **matrica krutosti**, takođe, **simetrična**.

Algoritam za proračun uticaja u nosaču, primjenom matrične analize, ima sljedeće korake:

- **Formiranje matrica krutosti svih elemenata-štapova zadatog nosača**
- **Određivanje vektora ekvivalentnog čvornog opterećenja za sve štapove koji su opterećeni, Q**
- **Formiranje matrica krutosti štapova u globalnom koordinatnom sistemu**
- **Formiranje matrice krutosti sistema štapova K* i vektora slobodnih članova S***
- **Određivanje vektora nepoznatih pomjeranja sistema štapova q***
- **Određivanje nepoznatih sila na krajevima štapova R**

Prikazaćemo matričnu analizu za:

- **Ravne linijske nosače (puni i rešetkasti nosači)**
- **Prostorne nosače (puni i rešetkasti nosači)**
- **Roštilje.**

Matrična analiza štapa

U matričnoj analizi **štap je osnovni element**.

Najjednostavniji je model pravog prizmatičnog štapa sa čvorovima na njegovim krajevima koji se razmatra u **dekartovom koordinatnom sistemu**.

Složeno naponsko stanje štapa u ravni može se **razdvojiti na: aksijalno naprezanje, savijanje i torziju.**

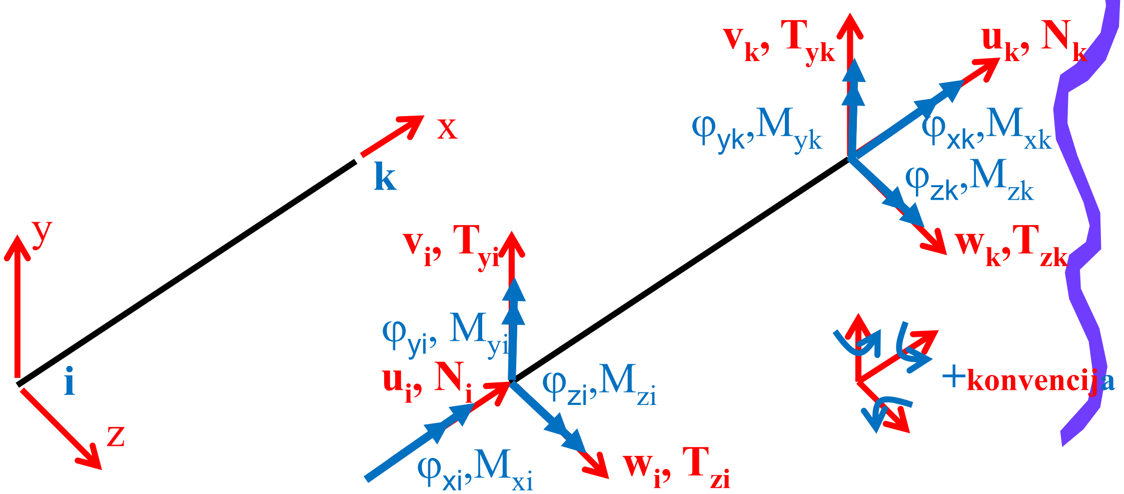
Za **aksijalno naprezanje i savijanje** prikazaće se postupak **izvođenja matrice krutosti direktnim i varijacionim postupkom**, dok će **matrica krutosti torzije** biti izvedena **direktnim postupkom**.

Osnovne nepoznate, konvencija i oznake

Na slici je prikazan prav prizmatičan štap proizvoljnog poprečnog presjeka dužine l, krajevi štapa su označeni sa i i k.

Postavljen je Descartes-ov pravougli koordinatni sistem x,y,z tako da se osa x poklapa sa osom štapa a ose y i z sa pravcima glavnih osa inercije. Sistem (x,y,z) naziva se lokalni koordinatni sistem.

Sistem (x,y,z) naziva se lokalni koordinatni sistem.



Osnovne **kinematičke veličine u čvorovima** su **generalisana pomjeranja u, v, w** u pravcima x, y, z i **obrtanja φ_x, φ_y, φ_z** oko osa x,y,z, respektivno.

Za generalisana pomjeranja u čvorovima upotrebljavaju se i nazivi **parametri pomjeranja ili stepeni slobode**.

Broj stepeni slobode čvora *jednak je* ***broju generalisanih pomjeranja čvorova****, dok je broj stepeni slobode štapa jednak zbiru stepeni slobode u čvorovima*.

Vektori pomjeranja krajeva štapa i i k je:

$$q_i^T = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_{xi} \quad \varphi_{yi} \quad \varphi_{zi}]$$

$$q_k^T = [u_k \quad v_k \quad w_k \quad \varphi_{xk} \quad \varphi_{yk} \quad \varphi_{zk}]$$

Vektor pomjeranja štapa:

$$q^T = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_{xi} \quad \varphi_{yi} \quad \varphi_{zi} \quad u_k \quad v_k \quad w_k \quad \varphi_{xk} \quad \varphi_{yk} \quad \varphi_{zk}]$$

n-broj stepeni slobode štapa

$$q^T = [q_i^T \quad q_k^T] = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]$$

Osnovne statičke veličine u čvorovima prostornog štapa su **generalisane sile N_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z**.

Generalisane sile u čvorovima i i k prikazuju se kao **komponente vektora sila R_i i R_k**:

$$R_i^T = [N_i \quad T_{yi} \quad T_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi}]$$

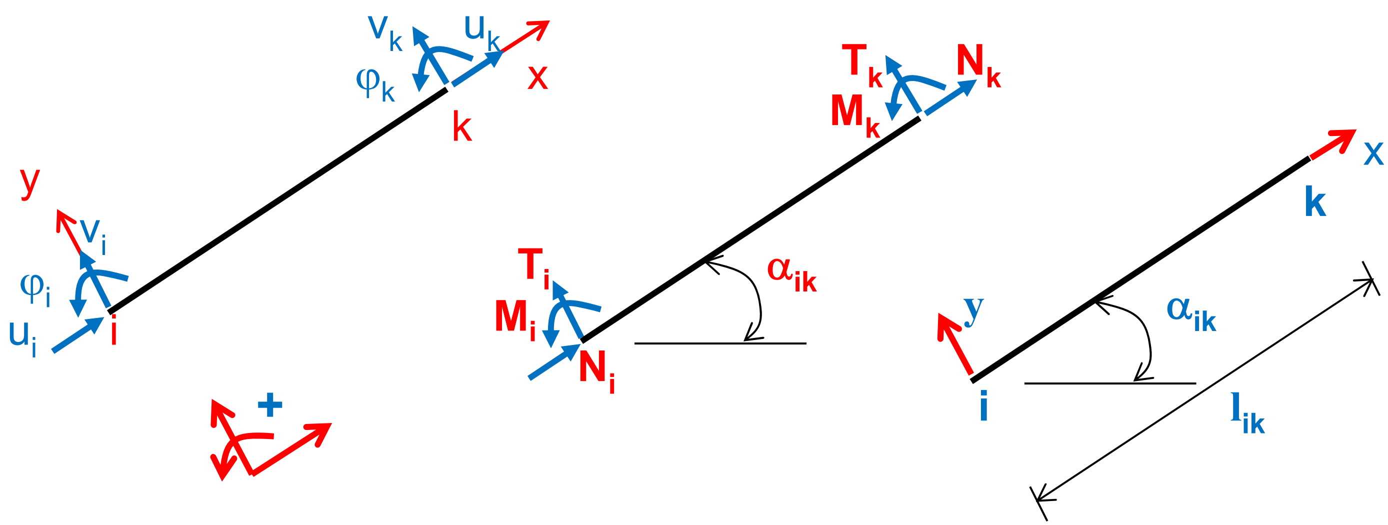
$$R_k^T = [N_k \quad T_{yk} \quad T_{zk} \quad M_{xk} \quad M_{yk} \quad M_{zk}]$$

Vektor generalisanih sila štapa može se napisati u sljedećem obliku:

$$R^T = \left[R_i^T \quad R_k^T\right] = [R_1 \quad R_2 \quad \ldots \quad R_n]$$

$$R^T = \left[N_i \quad T_{yi} \quad T_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi} \quad N_k \quad T_{yk} \quad T_{zk} \quad M_{xk} \quad M_{yk} \quad M_{zk}\right]$$

Za štap u ravni, **lokalni koordinatni sistem je xoy**, pri čemu se **osa x poklapa sa osom štapa**



Subvektori **vektora pomjeranja** su q_i^T i q_k^T:

$$q^T = \begin{bmatrix} q_i^T & q_k^T \end{bmatrix}$$

$$q_i^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i & \varphi_i \end{bmatrix}$$

$$q_k^T = \begin{bmatrix} u_k & v_k & \varphi_k \end{bmatrix}$$

Slijedi da su komponente **vektora pomjeranja za štap** u ravni:

$$q^T = \begin{bmatrix} q_i^T & q_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i & v_i & \varphi_i & u_k & v_k & \varphi_k \end{bmatrix}$$

Vektor sila na krajevima štapova je:

$$R_i = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{bmatrix} \qquad R_k = \begin{bmatrix} N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}$$

Vektor sila štapa sastoji od subvektora sila u čvorovima štapa:

$$R = \begin{bmatrix} R_i \\ R_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti štapa

Veze između vektora generalisanih sila R i vektora generalisanih pomjeranja q dat je sa:

$$R = k\,q$$

razvijeni matrični oblik:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_j \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Matrica kojom se uspostavlja **neposredna veza između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja na krajevima štapa naziva se MATRICA KRUTOSTI ŠTAPA**.

Ako je $q_j=1$ a $q_i=0$ za $i \neq j$ tada slijedi:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1j} \\ \dots \\ k_{ij} \\ \dots \\ k_{nj} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & \dots & R_i & \dots & R_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} k_{1j} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{nj} \end{bmatrix}^T$$

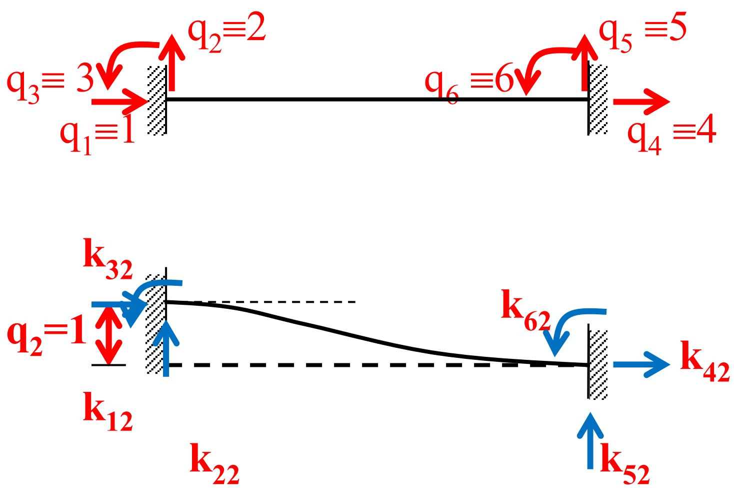
Element k_{ij} matrice krutosti štapa **jednak je generalisanoj sili R_i** koja nastaje usled **generalisanog pomjeranja $q_j=1$**, pri čemu su sva **ostala pomjeranja jednaka nuli**.

Ovo predstavlja **geometrijsko-statičko tumačenje elementa matrice krutosti štapa** i put kojim se definiše **postupak za određivanje elemenata matrice krutosti**.

Ovaj način **određivanja matrice krutosti** štapa naziva se **direktan postupak ili direktna metoda**.

Matrica krutosti štapa je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu **$k_{ij}=k_{ji}$** što je **posledica Maxwell-ovog stava o uzajamnosti pomjeranja**.

Primjer **određivanja članova matrice krutosti štapa u ravni**:



stanje q_2=1

$$q_2 = 1$$

$$q_1 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \\ k_{42} \\ k_{52} \\ k_{62} \end{bmatrix}$$

Reakcije obostrano uklještenog štapa predstavljaju članove druge kolone matrice krutosti štapa i-k.

Matrica krutosti štapa je **kvadratna matrica reda nxn**, gdje je **n broj stepeni slobode pomjeranja elementa/štapa**.

Matrica k je **simetrična matrica** za koju **ne postoji inverzna matrica**, iz razloga što **su tri komponente sila na krajevima štapa međusobno nezavisne a druge tri se mogu odrediti iz uslova ravnoteže** (linearno zavisne) **štapa**.

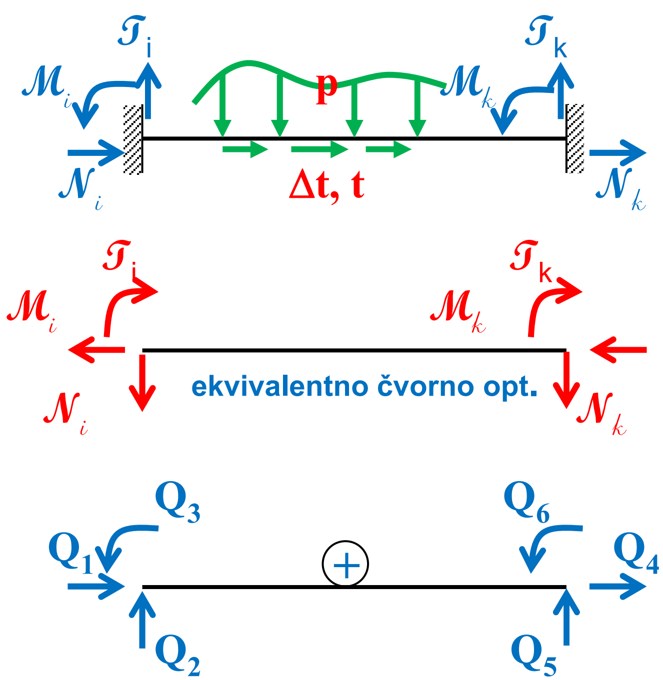
Vektor ekvivalentnog opterećenja

Zadato opterećenje može biti **raspodijeljeno opterećenje p i m**, **koncentrisane sile i momenti P, M**, **temperaturna promjena t i temperaturna razlika Δt**.

Koncentrisano opterećenje na krajevima štapa kojim se zamjenjuju spoljašnji uticaji koji djeluju duž ose štapa naziva se EKVIVALENTNO OPTEREĆENJE.

Vektor ekvivalentnog opterećenja čine **negativne vrijednosti reakcija krajeva totalno uklještenog štapa usled zadatog opterećenja koje djeluje na štap**.

Za komponente **ekvivalentnog opterećenja (sile i momenti) u čvorovima** štapa važi ista **konvencija kao i za generalisane sile.**



$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathcal{N}_i \\ \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{N}_k \\ \mathcal{T}_k \\ \mathcal{M}_k \end{bmatrix}$$

Direktan postupak određivanja matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja

Naponsko stanje u ravni razdvajamo na: **aksijalno naprezanje**

i **savijanje silama u ravni xoy**

Ukupno naprezanje dobijamo **superpozicijom ova dva naprezanja**.

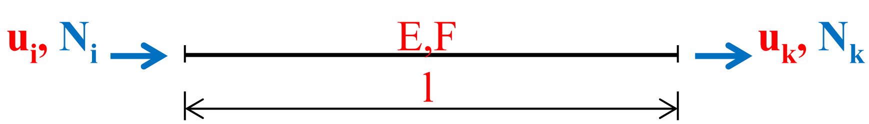
Aksijalno naprezanje štapa

Štap koji je u stanju **aksijalnog naprezanja** prikazan je na slici, geometrijske i materijalne karakteristike štapa su dužina štapa l, površina poprečnog presjeka F i modul elastičnosti E.

Parametri pomjeranja u čvorovima i i k su pomjeranja u pravcu ose štapa $\mathbf{u_i}$ **i** $\mathbf{u_k}$ pa **element ima dva stepena slobode pomjeranja**, **po jedan u svakom čvoru**.

Generalisane sile u čvorovima su **aksijalne sile** $\mathbf{N_i}$ **i** $\mathbf{N_k}$.

$$R = \begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \end{bmatrix}$$

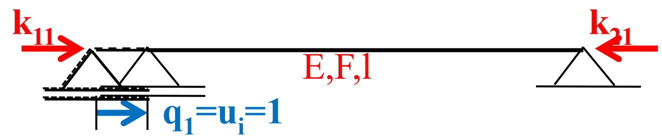


$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \end{bmatrix}$$

Na osnovu **geometrijsko-statičkog tumačen**ja

a) za slučaj kada je $\mathbf{q_1=1}$ **i** $\mathbf{q_2=0}$ slijedi da je:

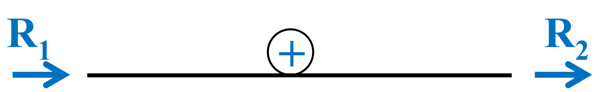
$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix}$$



$\Delta l = u_i = 1$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{l} \qquad \sigma = E\varepsilon = \frac{E}{l} \qquad N = F\sigma = FE\varepsilon = \frac{EF}{l}$$

Kada se vrijednost normalne sile ubaci u veze sila i pomjeranja, vodeći računa o pozitivnoj konvenciji za sile:



$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EF}{l} \\ -\dfrac{EF}{l} \end{bmatrix}$$

b) za slučaj kada je **$q_1=0$ i $q_2=1$** slijedi da je:

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{bmatrix}$$

$$N = F\sigma = FE\varepsilon = \frac{EF}{l}$$

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{EF}{l} \\ \dfrac{EF}{l} \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti aksijalno napregnutog štapa je:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja može nastati od opterećenja duž ose štapa i uticaja temperature.

Nosač sa slike je **jedan put statički neodređen** i za **određivanje reakcija** $\mathcal{N}^\circ_i$ **i** $\mathcal{N}^\circ_k$ može se primijeniti **metoda sila:**

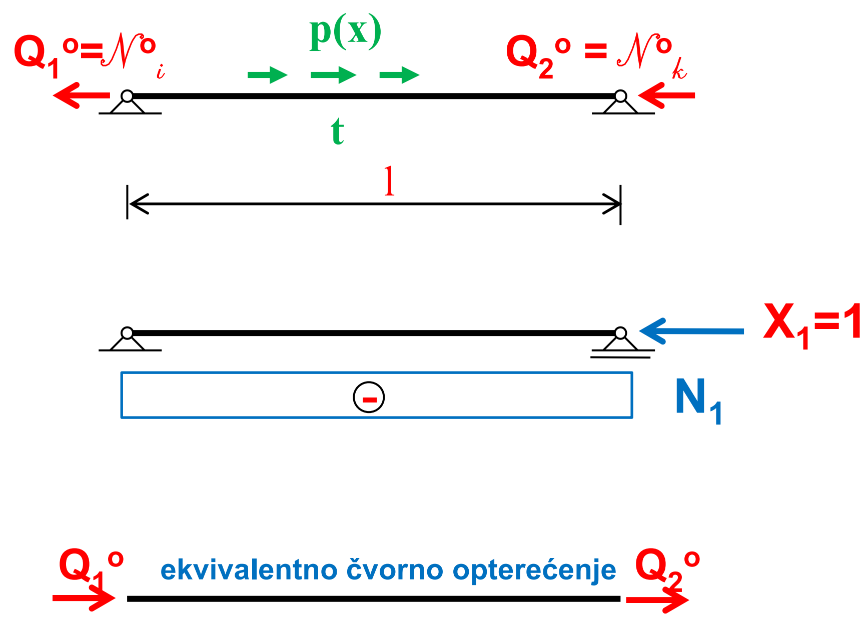
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11}$$

EF=const

$$EF\delta_{11} = \int_0^l N_1^{\,2} dx = l$$

$$EF\delta_{10} = \int_0^l N_1 N_0 dx$$



Vektor ekvivalentnog opterećenja je :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix}_o + \begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix}_t$$

Za slučaj kada je opterećenje ravnomjerno raspoređeno **p(x)=p$_o$=const**:

EF=const

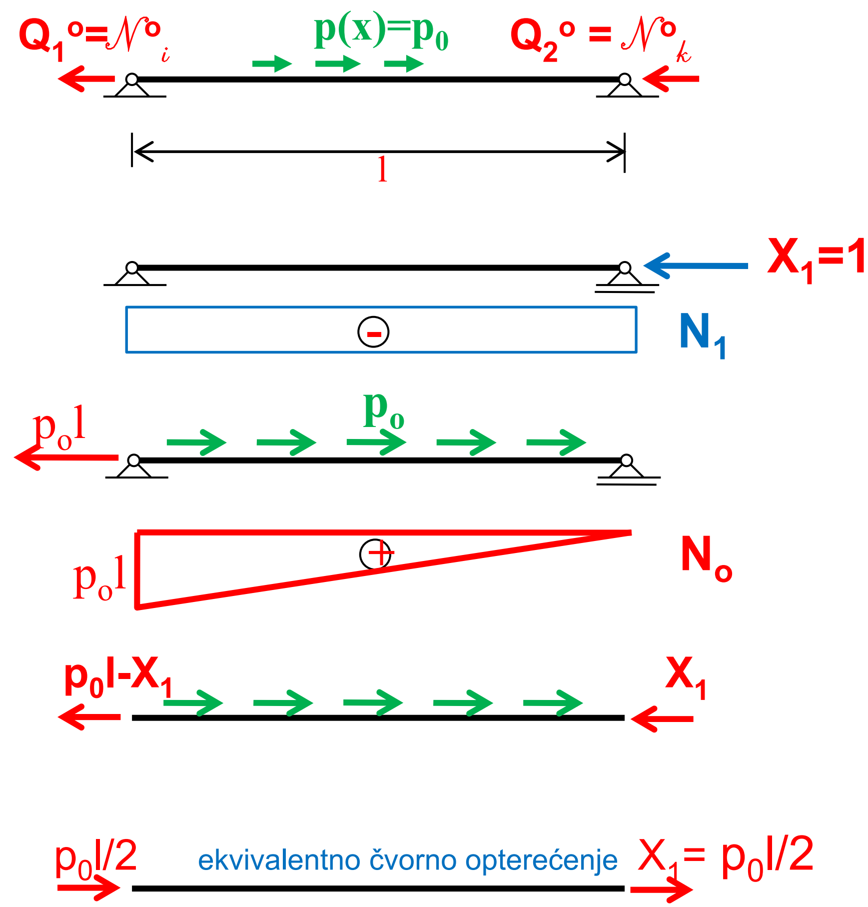
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11}$$

$$EF\delta_{11} = \int_0^l N_1^{\,2} dx = l$$

$$EF\delta_{10} = \int_0^l N_1 N_0 dx = -p_0 l^2 / 2$$

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} = p_0 l / 2$$



Vektor ekvivalentnog opterećenja je :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix}_o \qquad \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{p_o l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Za slučaj kada je t=**const**:

EF=const

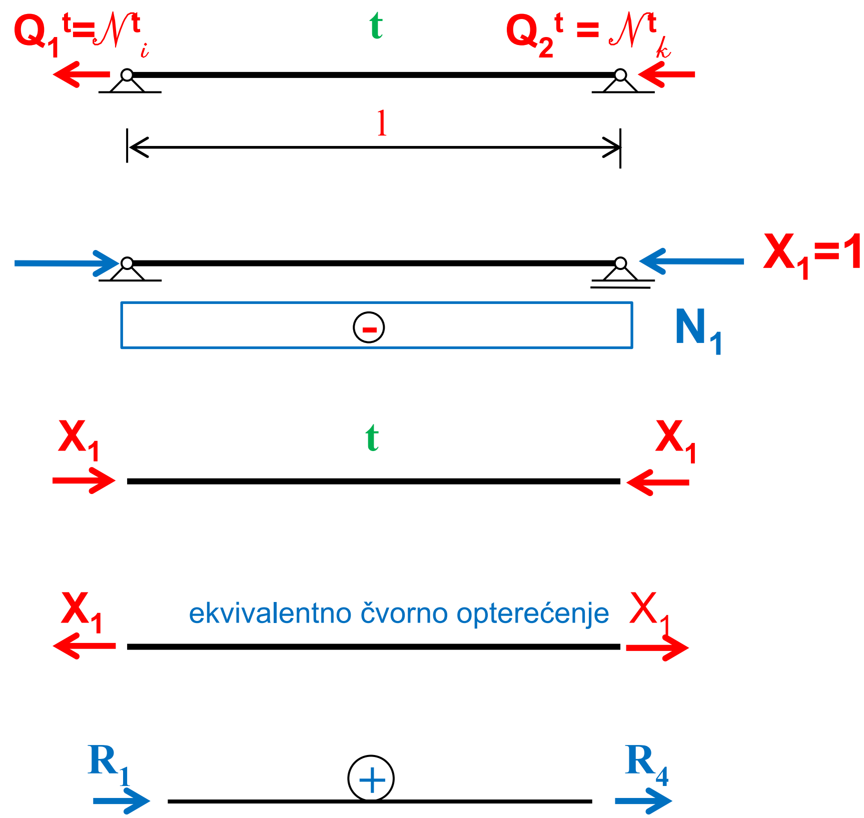
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1t} = 0$$

$$X_1 = -\delta_{1t} / \delta_{11}$$

$$EF\delta_{11} = \int_0^l N_1^2 dx = l$$

$$EF\delta_{1t} = EF\int_0^l N_1 t\alpha_t dx = -EFt\alpha_t l$$

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} = EFt\alpha_t$$



Vektor ekvivalentnog opterećenja je :

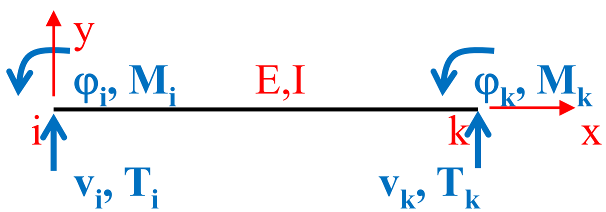
$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = EF\alpha_t t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Savijanje u ravni

Štap dužine l, momenta inercije presjeka je I i modula eleastičnosti materijala E izložen je **savijanju u ravni xoy**.

Generalisana pomjeranja su **poprečna pomjeranja v_i i v_k i obrtanja krajeva štapa φ_i i φ_k** što znači da **element ima četiri stepena slobode pomjeranja**, **po dva u svakom čvoru**.

Konvencija o pozitivnom znaku za sile i pomjeranja:



Vektor generalisanih sila:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}$$

Vektor generalisanih pomjeranja:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti štapa je reda nxn, za savijanje **je reda 4x4** zbog čega je **veza generalisanih sila i generalisanih pomjeranja data sa**:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

Zbog simetrije matrice krutosti

$$k_{ij}=k_{ji}$$

Pokazano je da se **koeficijenti k_{ij}, i,j=1,2,3,4** mogu odrediti **kao reakcije obostrano uklještenog štapa usled jediničnih pomjeranja i obrtanja njegovih krajeva**.

S obzirom da se radi **o savijanju u ravni obostrano uklješten štap je dva puta statički neodređen**, i može se **jednostavno riješiti primjenom metode sila**.

Uslovne jednačine metode sila u tom slučaju su:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1c} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2c} = 0$$

koeficijenti i slobodni članovi ovih jednačina definisani sa:

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI_{ik}} dx \qquad \delta_{ic} = -\sum_j C_{ij} c_j$$

M_i, M_k, C_{ji} su momenti i reakcije oslonca od nepoznatih X_i=1 a **c_j zadata pomjeranja ili obrtanja oslonaca.**

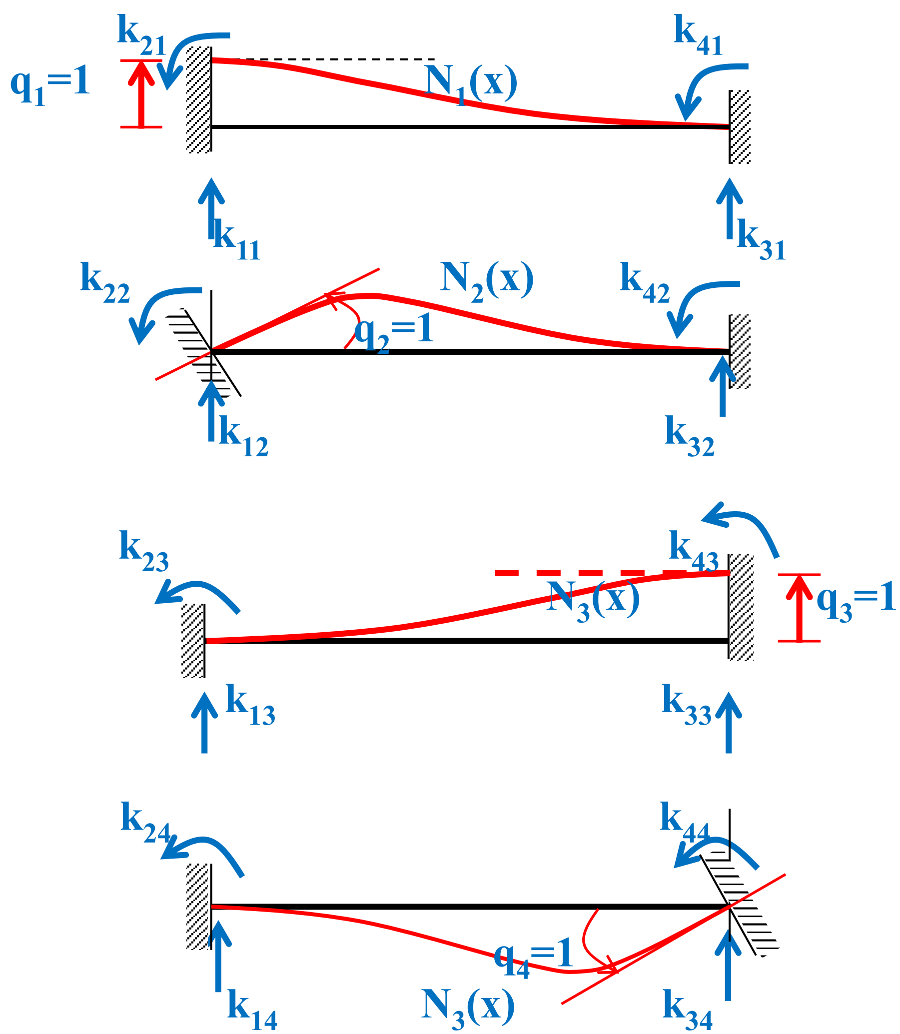
STATIČKO-GEOMETRIJSKO ZNAČENJE

Stanje $q_1=1$

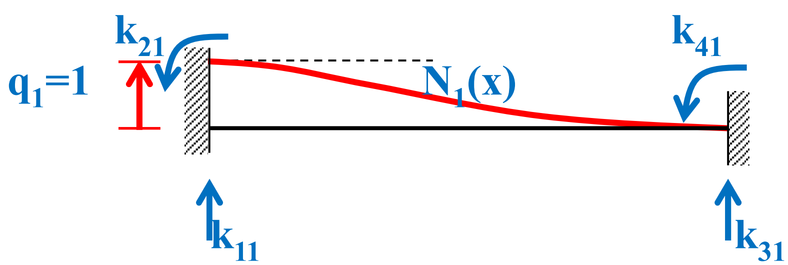
Stanje $q_2=1$

Stanje $q_3=1$

Stanje $q_4=1$



Stanje $q_1=1$ **EI=const**

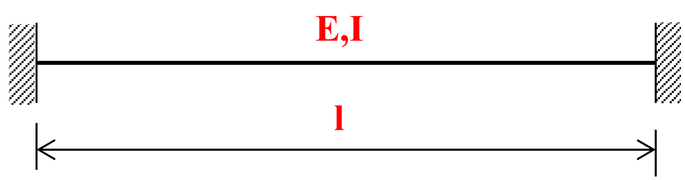


$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1c} = 0$$

$$\delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2c} = 0$$

Određivanje Ri (i=1,2,3,4) **primjenom metode sila:**



$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI_{ik}} dx \qquad \delta_{ic} = -\sum_j C_{ij} c_j$$

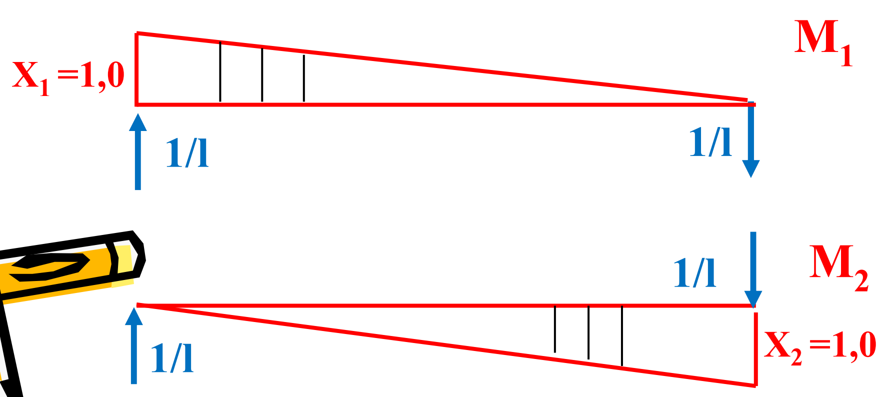
$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \int_0^l M^2{}_1 dx = \int_0^l M^2{}_2 = \frac{l}{3}$$

Osnovni sistem, n=2:

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^l M_1 M_2 dx = -\frac{l}{6}$$

$$EI\delta_{1c} = EI\delta_{2c} = -EI\frac{1}{l} \qquad X_1 = EI\frac{6}{l^2}$$

Dijagrami u osnovnom sistemu:



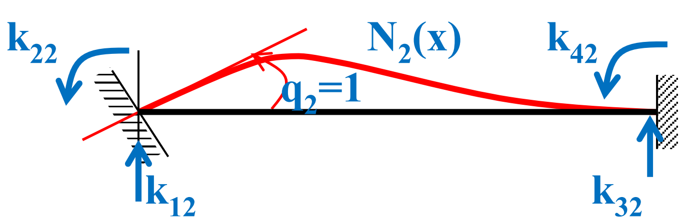
$$X_2 = EI\frac{6}{l^2}$$

Iz ravnoteže štapa

$$T_1 = -T_2 = EI\frac{12}{l^3}$$

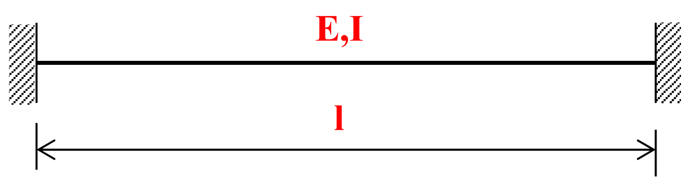
$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 \\ 6l \\ -12 \\ 6l \end{bmatrix}$$

Stanje $q_2=1$ **EI=const**



$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \\ k_{42} \end{bmatrix}$$

Određivanje Ri (i=1,2,3,4) **primjenom metode sila:**



$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1c} = 0$$

$$\delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2c} = 0$$

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI_{ik}} dx \qquad \delta_{ic} = -\sum_j C_{ij} c_j$$

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \int_0^l M^2{}_1 dx = \int_0^l M^2{}_2 = \frac{l}{3}$$

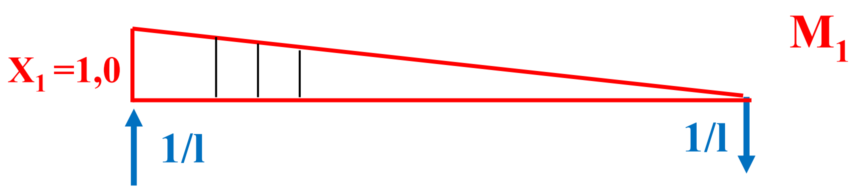
Osnovni sistem, n=2:

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^l M_1 M_2 dx = -\frac{l}{6}$$

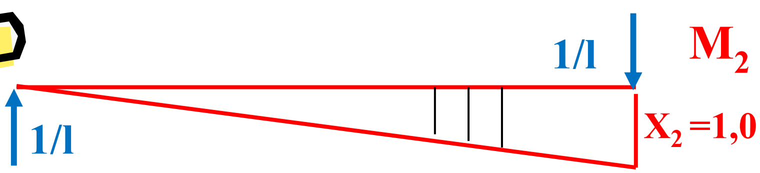
$$EI\delta_{1c} = -EI \qquad EI\delta_{2c} = 0$$

$$X_1 = EI\frac{4}{l} \qquad X_2 = EI\frac{2}{l}$$

Dijagrami u osnovnom sistemu:

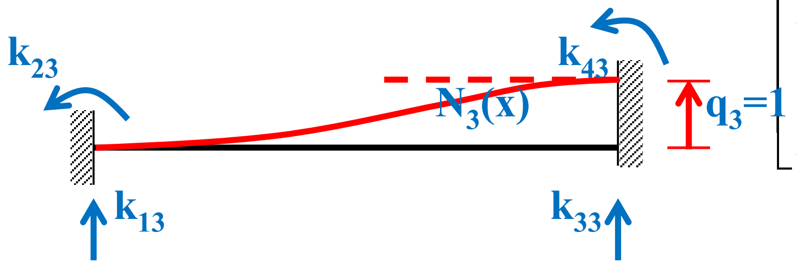


Iz ravnoteže štapa $\quad T_1 = -T_2 = EI\frac{6}{l^2}$



$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \\ k_{42} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6l \\ 4l^2 \\ -6l \\ 2l^2 \end{bmatrix}$$

Stanje $q_3=1$ **EI=const**

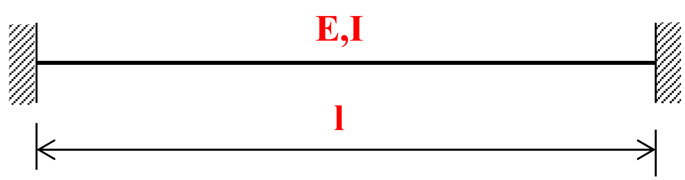


$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \end{bmatrix}$$

Određivanje Ri (i=1,2,3,4) **primjenom metode sila:**

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1c} = 0$$

$$\delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2c} = 0$$



$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI_{ik}} dx \qquad \delta_{ic} = -\sum_j C_{ij} c_j$$

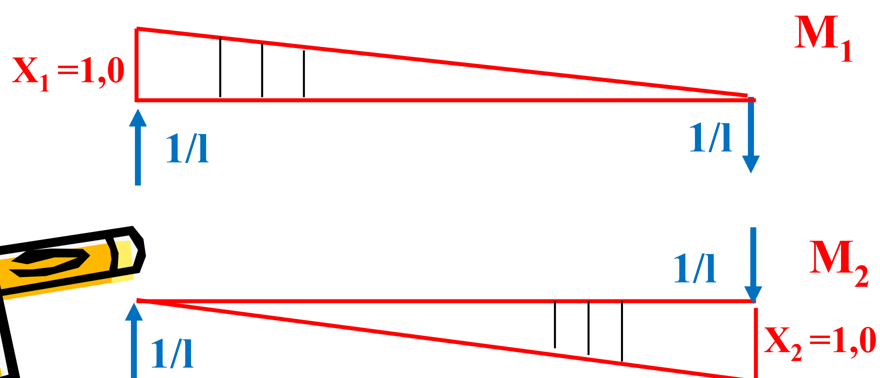
$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \int_0^l M^2{}_1 dx = \int_0^l M^2{}_2 = \frac{l}{3}$$

Osnovni sistem, n=2:

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^l M_1 M_2 dx = -\frac{l}{6}$$

$$EI\delta_{1c} = EI\delta_{2c} = EI\frac{1}{l}$$

Dijagrami u osnovnom sistemu:

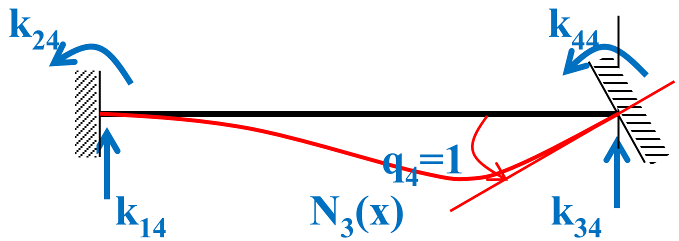


$$X_1 = -EI\frac{6}{l^2} \qquad X_2 = -EI\frac{6}{l^2}$$

Iz ravnoteže štapa $T_1 = -T_2 = -EI\dfrac{12}{l^3}$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 \\ -6l \\ 12 \\ -6l \end{bmatrix}$$

Stanje $q_4=1$ **EI=const**

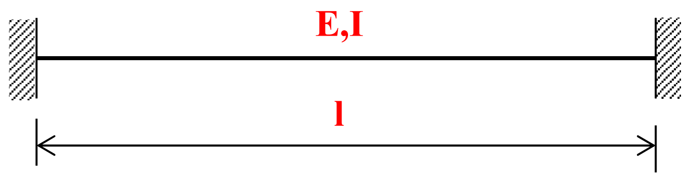


$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \\ k_{44} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1c} = 0$$

Određivanje Ri (i=1,2,3,4) **primjenom metode sila:**

$$\delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2c} = 0$$



$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI_{ik}} dx \qquad \delta_{ic} = -\sum_j C_{ij} c_j$$

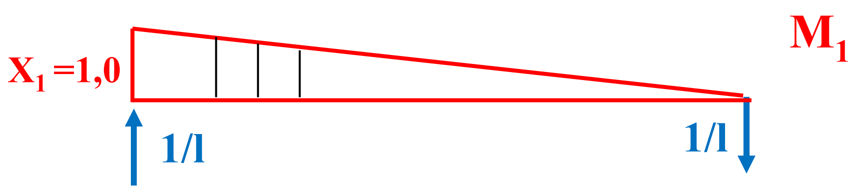
$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \int_0^l M^2{}_1 dx = \int_0^l M^2{}_2 = \frac{l}{3}$$

Osnovni sistem, n=2:

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^l M_1 M_2 dx = -\frac{l}{6}$$

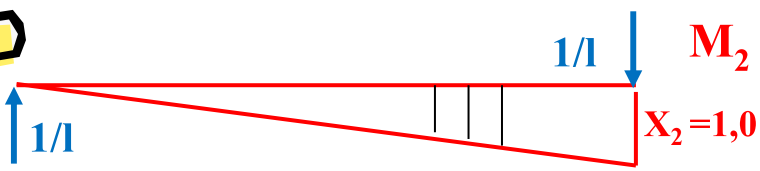
$$EI\delta_{1c} = 0 \qquad EI\delta_{2c} = -EI$$

Dijagrami u osnovnom sistemu:



$$X_1 = EI\frac{2}{l} \qquad X_2 = EI\frac{4}{l}$$

Iz ravnoteže štapa $T_1 = -T_2 = EI\dfrac{6}{l^2}$



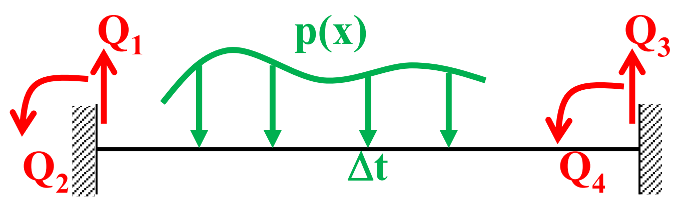
$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \\ k_{44} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6l \\ 2l^2 \\ -6l \\ 4l^2 \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti štapa opterećenog na **čisto savijanje** ima sljedeći oblik

$$k = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

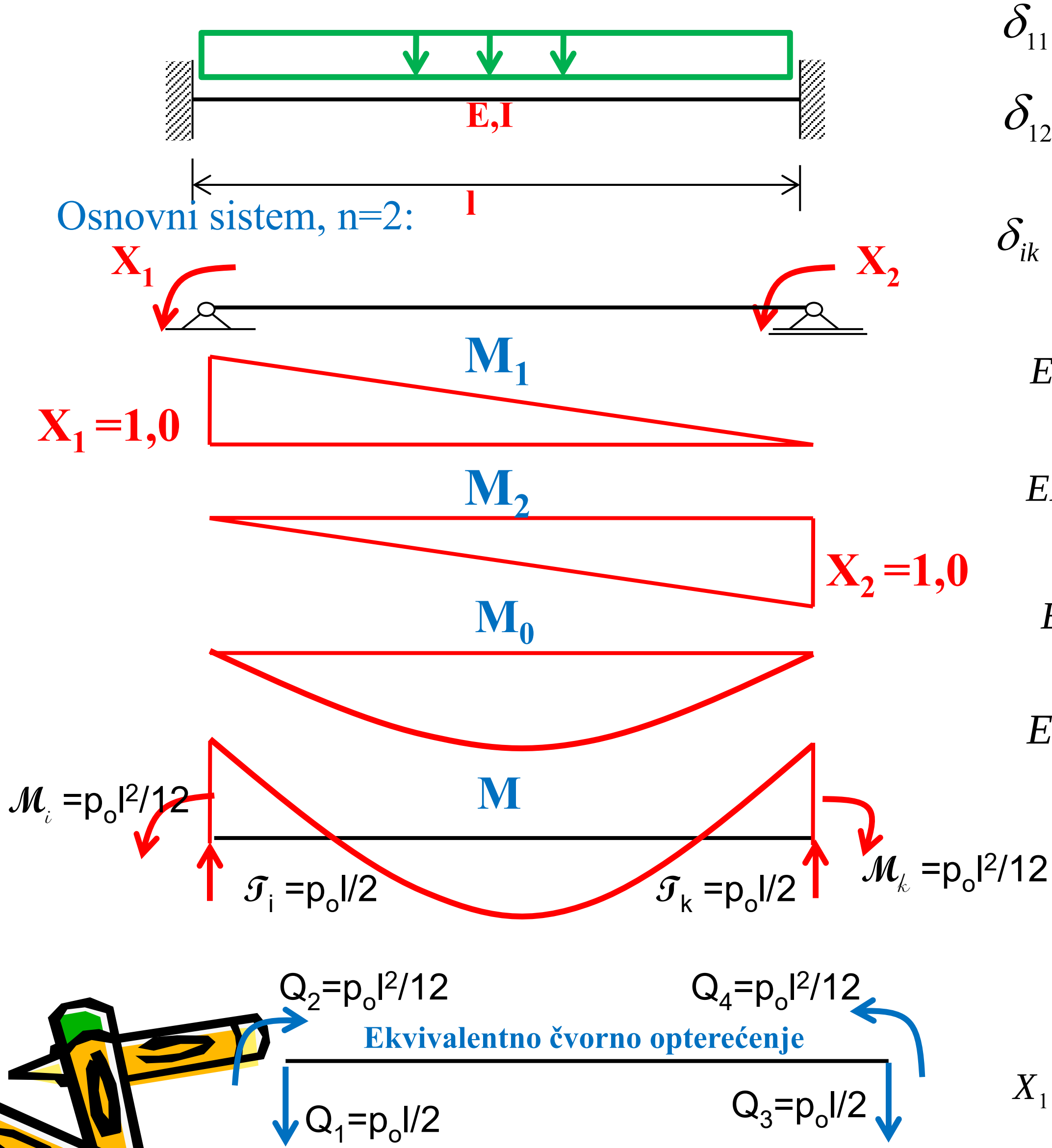
Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja štapa opterećenog na **čisto savijanje** ima sljedeći oblik

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{T}_k \\ \mathcal{M}_k \end{bmatrix}_o - \begin{bmatrix} \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{T}_k \\ \mathcal{M}_k \end{bmatrix}_{\Delta t}$$



Komponente vektora ekvivalentnog opterećenja **jednake su negativnim vrijednostima reakcija totalno uklještenog štapa usled zadatih spoljašnjih uticaja** koji mogu biti **opterećenje upravno na osu štapa i temperaturna razlika Δt .**

$p(x)=p_o=const$



Metoda sila:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI_{ik}}dx \qquad \delta_{io} = \int_0^l \frac{M_i M_o}{EI_{ik}}dx$$

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \int_0^l M^2{}_1 dx = \int_0^l M^2{}_2 = \frac{l}{3}$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^l M_1 M_2 dx = -\frac{l}{6}$$

$$EI\delta_{1o} = \int_0^l M_1 M_o dx = -\frac{p_o l^3}{24}$$

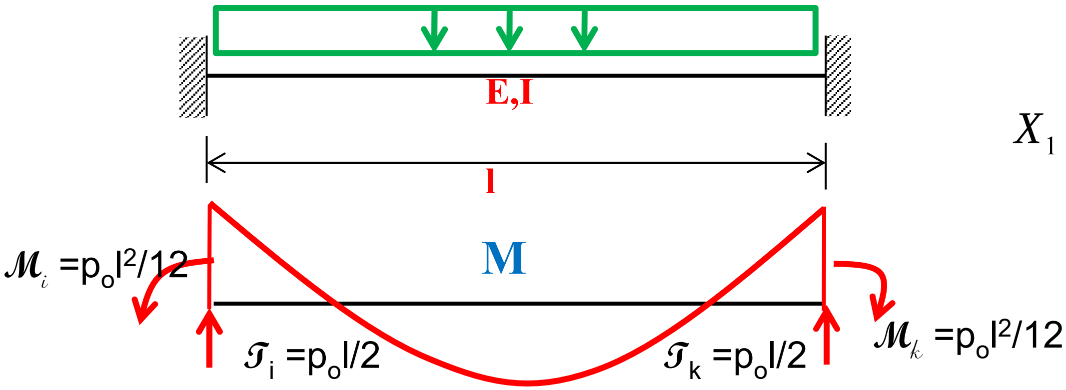
$$EI\delta_{2o} = \int_0^l M_2 M_o dx = \frac{p_o l^3}{24}$$

$$\frac{l}{3}X_1 - \frac{l}{6}X_2 - \frac{p_o l^3}{24} = 0$$

$$-\frac{l}{6}X_1 + \frac{l}{3}X_2 + \frac{p_o l^3}{24} = 0$$

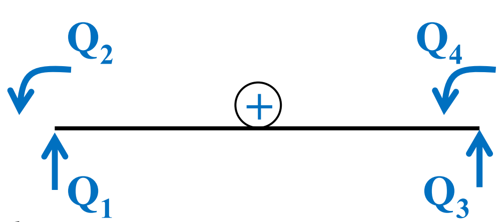
$$X_1 = \frac{p_o l^2}{12} \qquad X_2 = -\frac{p_o l^2}{12} \qquad T_1 = T_2 = \frac{p_o l}{2}$$

$p(x)=p_o=const$



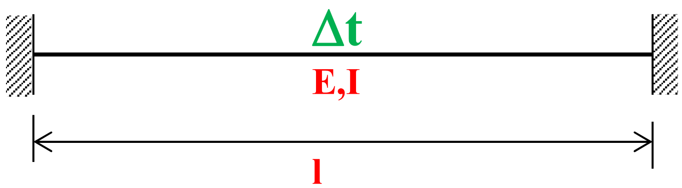
$$X_1 = \frac{p_o l^2}{12} \qquad X_2 = -\frac{p_o l^2}{12}$$

$$T_1 = T_2 = \frac{p_o l}{2}$$



$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_o \dfrac{l}{2} \\ -p_o \dfrac{l^2}{12} \\ -p_o \dfrac{l}{2} \\ p_o \dfrac{l^2}{12} \end{bmatrix}$$

Za slučaj kada na štap djeluje temperaturna razlika Δt



mijenjaju se slobodni članovi

$$\delta_{it} = \int_0^l M_i \alpha_t \frac{\Delta t}{h} dx$$

Za EI=const

$$EI\delta_{1t} = -EI\delta_{2t} = EI\alpha_t \frac{\Delta t l}{2h}$$

Uslovne jednačine i rješenja jednačina

$$\frac{l}{3} X_1 - \frac{l}{6} X_2 + EI\alpha_t \frac{\Delta t l}{2h} = 0$$

$$-\frac{l}{6} X_1 + \frac{l}{3} X_2 - EI\alpha_t \frac{\Delta t l}{2h} = 0$$

$$X_1 = -X_2 = EI\alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

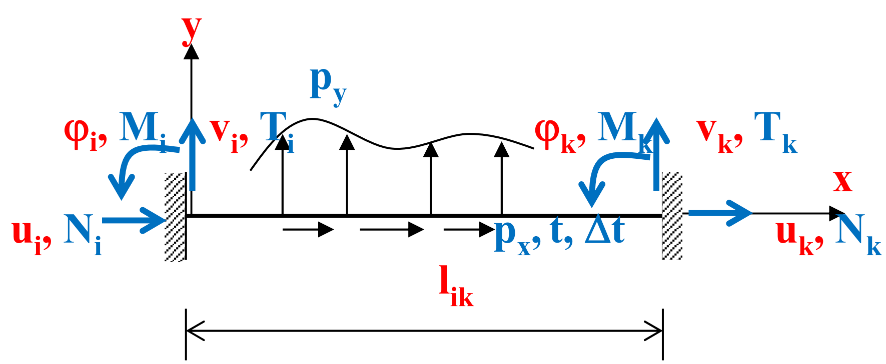
$$T_1 = T_2 = 0$$

Vodeći računa o pozitivnoj konvenciji za sile vektor ekvivalentnog opterećenja je:

$$Q_t = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}_t = EI\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

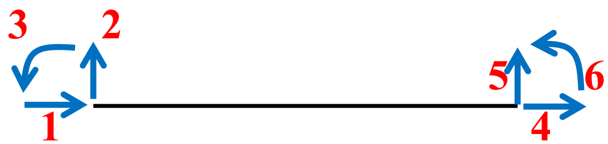
Matrica krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja ravnog prizmatičnog štapa

Ravni štap može da **primi i prenese spoljašnje uticaje** koji djeluju **u pravcu ose štapa p_x kao i opterećenje upravno na osu štapa p_y, temperaturnu promjenu u osi štapa t i temperaturnu razliku Δt** duž ose štapa:



Pošto **spoljašnji uticaji predstavljaju zbir uticaja** koji se javljaju u slučaju **aksijalnog naprezanja i u slučaju savijanja** slijedi da se **matrica krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja ravnog štapa mogu dobiti superpozicijom matrica krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja za aksijalno naprezanje štapa i savijanje**.

Štap u ravni ima šest stepeni slobode, po tri u svakom čvoru, što je jednako **zbiru stepeni slobode aksijalnog naprezanja i savijanja**:



$$
k_{aks} = \frac{EF}{l}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} 1 & 4 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array}
\end{array}
$$

$$
k_{sav} = \frac{EI}{l^3}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 5 & 6 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

Vodeći računa o oznakama generalisanih sila i generalisanih pomjeranja 1,…,6 **postavljajući u matrici krutosti 6x6 svaki od članova na odgovarajuće mjesto** dobija se matrica krutosti štapa:

$$
k = k_{aks} + k_{sav} =
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
-\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

Superpozicijom **vektor ekvivalentnog opterećenja štapa i-k u ravni** definisan je sa :

$$Q = Q_{aks} + Q_{sav} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}_{o,t} = -\begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}_{o,t}$$